APPENDIX bij Met en/of zonder coördinaten

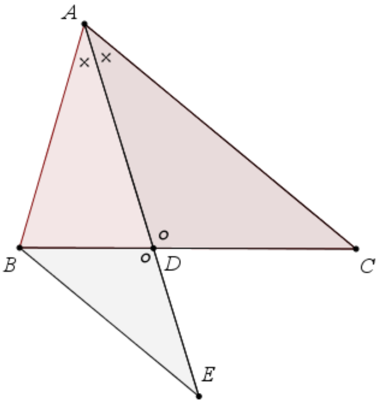
DICK KLINGENS (*dklingens@gmail.com*)

april 2017

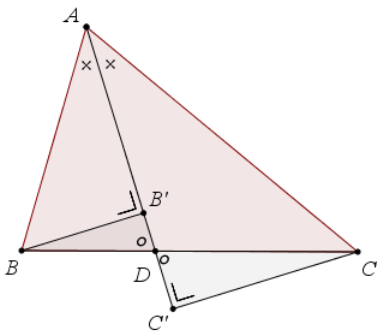
1. Nóg drie bewijzen van stelling I

Stelling I (bissectricestelling). *Is D het voetpunt van de bissectrice van hoek A op de zijde BC* van driehoek *ABC, dan is AB* : *AC* = *BD* : *BC.*

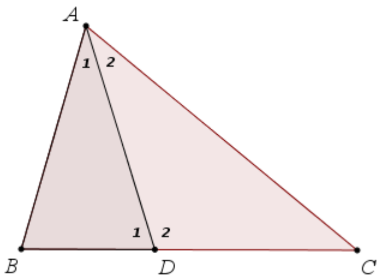
figuur a1



figuur a2



figuur a3



Bewijs A. Zie figuur a1. Kies op het verlengde van *AD* het punt *E* zó dat <u>*EB*</u> = *AB*. Dan zijn de driehoeken *EBD* en *ACD* gelijkvormig (*hh*). Dus:
BD : *CD* = <u>*EB*</u> : *AC*
En dan is ook *BC* : *CD* = *AB* : *AC*. ◊

Bewijs B. Zie figuur a2. Met *BB'* en *CC'* loodrecht op *AD* zijn de driehoeken *BB'D* en *CC'D* gelijkvormig (*hh*). En dat geldt eveneens voor de driehoeken *ABB'* en *ACC'* (ook *hh*).
Enerzijds is dan *BD* : *CD* = *BB'* : *CC'* en anderzijds is *AB* : *AC* = *BB'* : *CC'*. Zodat inderdaad:
AB : *AC* = *BD* : *CD* ◊

Bewijs C. Zie figuur a3. En natuurlijk kan het ook met de *sinusregel*. Daarmee blijkt dat:

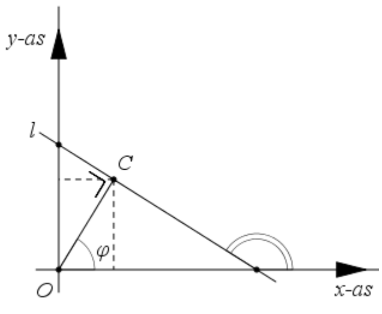
$$\frac{AB}{\sin D_1} = \frac{BD}{\sin A_1} \quad \text{en} \quad \frac{AC}{\sin D_2} = \frac{CD}{\sin A_2}$$

Met $\sin D_1 = \sin D_2$ (samen 180°) en $\sin A_1 = \sin A_2$ zien we snel dat *AB* : *AC* = *BD* : *CD*. ◊

2. De normaalvergelijking van een lijn

We bekijken een en ander dus in een rechthoekig assenstelsel *xOy*; zie figuur a4a.
We gaan uit van de 'gewone' vergelijking van de lijn *l*:
$l :: ax + by = c$

figuur a4a



Is *n* de afstand van het punt *O* tot *l* en is *φ* de hoek van de drager van het loodlijnstuk met de positieve *x*-as, dan geldt voor het voetpunt $C = (x_0, y_0)$ van de loodlijn:
$x_0 = n \cdot \cos \varphi,\ y_0 = n \cdot \sin \varphi$
Voor de richtingscoëfficiënt (rico) van *l* hebben we dan:

$\text{rico}(l) = \frac{-b}{a} = \tan(90^\circ + \varphi) = \frac{-1}{\tan\varphi}$

En daarmee kunnen we een ‘andere’ vergelijking van *l* opstellen:

$l :: y = \frac{-1}{\tan\varphi}(x - n\cdot\cos\varphi) + n\cdot\sin\varphi$ of, na vermenigvuldiging met sin *φ*:

$\sin\varphi\cdot y = -\cos\varphi\cdot x + n\cdot\cos^2\varphi + n\cdot\sin^2\varphi$

Zodat die ‘andere’ vergelijking geschreven kan worden als:

$l :: \cos\varphi\cdot x + \sin\varphi\cdot y = n$

Dit is de *normaalvergelijking* (*normaalvorm*) van de lijn *l*, ook *Hesse-vergelijking* genoemd, naar L.O. Hesse (1811-1874, Duitsland) die deze vergelijking in 1865 als eerste beschreef in zijn *Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie*.

Opmerkingen

1. In de Hesse-vergelijking moet *φ* gerekend worden in positieve draairichting, vanaf de positieve *x*-as. Voor mij is de hoek tussen een rechte lijn en de positieve *x*-as een hoek tussen 0° en 180°.
2. De som van de kwadraten van de coördinaten van *x* en *y* is gelijk aan 1. ◊

Op basis van opmerking 2 moet de herleiding van de vergelijking $ax + by = c$ zó geschieden dat met vermenigvuldiging met een factor $k \neq 0$ uit $k\cdot ax + k\cdot by = k\cdot c$ volgt dat $(ka)^2 + (kb)^2 = 1$.

Oftewel $k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, zodat, met $k > 0$:

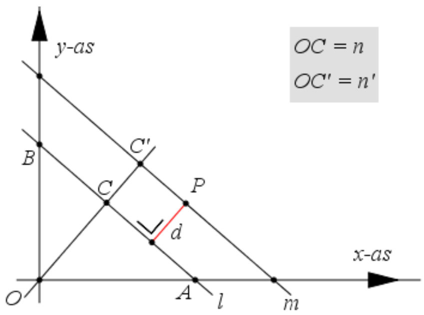
$$l_H :: \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

In de normaalvorm is *n* een positief getal. De waarde van *k* moet dus zó gekozen worden (+ of –) dat dit ook in de l_H-vorm het geval is.

Afstand punt-lijn (1e methode)

De afstand van een punt *P* tot een lijn *l* kan met behulp van de Hesse-vergelijking eenvoudig worden berekend.

figuur a4b



Gegeven: $P = (x_1, y_1)$ en $l :: \cos\varphi\cdot x + \sin\varphi\cdot y = n$.

Te berekenen: $d = \text{afst}(P, l)$.

Berekening. Zie figuur a4b. Voor de lijn *m* door *P* evenwijdig met *l* is dan:

$m :: \cos\varphi\cdot x + \sin\varphi\cdot y = n_1$

En daarmee is dan $d = PP' = n_1 - n$

Tot hiertoe heeft n_1 nog een onbekende waarde, maar omdat *P* op *m* ligt is n_1 te berekenen:

$n_1 = \cos\varphi\cdot x_1 + \sin\varphi\cdot y_1$

Zodat, rekening houdend met het teken van *d*:

$d = |\,n_1 - n\,| = |\cos\varphi\cdot x_1 + \sin\varphi\cdot y_1 - n\,|$

En met de vergelijking van *l* geschreven als $ax + by = c$, is dat hetzelfde als:

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

Afstand punt-lijn (2e methode)
Zonder de goniometrische vorm van de Hesse-vergelijking kunnen we ook komen tot de hierboven staande afstandsformule.
Met $l :: ax + by = c$ en $m :: ax + by = c'$ en met $P = (x_1, y_1)$ op de lijn m is (en zie weer figuur a4b):
$A = (\frac{c}{a}, 0)$, $B(0, \frac{c}{b})$ en $c' = ax_1 + by_1$

Daaruit volgt, met Φ als oppervlaktefunctie:

- $AB = \sqrt{(\frac{c}{a})^2 + (\frac{c}{b})^2} = \frac{c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}$
- $\Phi(OAB) = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB = \frac{1}{2} n \cdot \frac{c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}$

Maar ook is:

- $\Phi(OAB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \frac{c^2}{ab}$

Uit beide uitdrukking voor de oppervlakte volgt dan dat $n = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

En dan is, analoog, $n' = \dfrac{c'}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. En zo vinden we:

$$d = |n' - n| = \left| \frac{ax_1 + by_1 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

3. Twee bewijzen van de omgekeerde van stelling I

Stelling Ib (omgekeerde bissectricestelling). *Als in driehoek ABC het punt D op de zijde BC ligt én AB* : *AC = BD* : *CD is, dan is AD de bissectrice van hoek A.*

Bewijs A (analytisch). We gaan uit van $AB : AC = BO : CO$. Stel in een rechthoekig assenstelsel xOy is $A = (p, q)$, $B = (-b, 0)$ en $C = (c, 0)$. Hieruit blijkt dat $BO : CO = b : c$.
We willen in deze configuratie aantonen dat AO de bissectrice is van hoek A. Voldoende is nu te bewijzen dat het punt O op die bissectrice ligt.
De vergelijkingen van de benen van hoek A zijn (we zagen deze ook in het artikel):
$AB :: \; y = \frac{q}{p+b}(x + b)$, $AC :: \; y = \frac{q}{p-c}(x - c)$
De normaalvergelijkingen van die lijnen zijn (zie eventueel weer paragraaf 2):

$$AB :: \frac{qx - (p+b)y + bq}{\sqrt{q^2 + (p+b)^2}} = 0, \quad AC :: \frac{qx - (p-c)y - cq}{\sqrt{q^2 + (p+c)^2}} = 0$$

Merk op dat we uitdrukkingen voor de lengtes van de zijden AB en AC terugzien in de noemers van deze uitdrukkingen.
Voor de afstanden van O tot de benen van hoek A geldt nu:

$$\text{afst}(O, AB) = \left|\frac{bq}{AB}\right| = \frac{bq}{AB}, \quad \text{afst}(O, AC) = \left|\frac{-cq}{AC}\right| = \frac{cq}{AC}$$

En hieruit volgt:

$$\text{afst}(O, AB) : \text{afst}(O, AC) = \frac{b}{AB} : \frac{c}{AC} = \frac{AC \cdot b}{AB \cdot c} = \frac{AC}{AB} : \frac{c}{b} = 1$$

Het zijn gelijke afstanden! Het punt O ligt inderdaad op de bissectrice van hoek A. ◊

Bewijs B (uit het ongerijmde; synthetisch). Het is voldoende aan te tonen dat het punt D op de bissectrice van hoek A ligt.
(*Veronderstelling*) Stel dat D niet op die bissectrice ligt.
Dan is er een punt D' ($\neq D$) op BC dat het voetpunt is van de bissectrice van hoek A. Volgens stelling I (bissectricestelling) geldt dan:
$AB : AC = BD' : CD'$

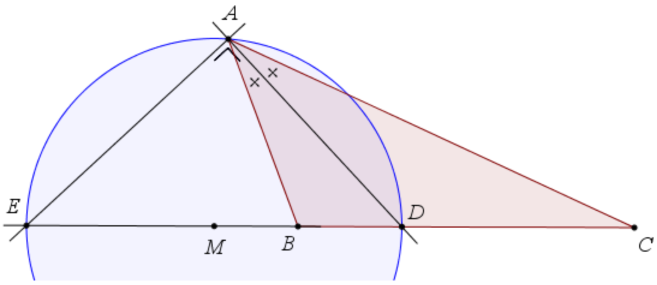
Met de gegeven evenredigheid vinden we dan eenvoudig:
BD : *CD* = *BD'* : *CD'*
Maar dan zijn er twee *verschillende* punten op het lijnstuk *BC* die dat lijnstuk in *dezelfde* verhouding verdelen. En dat kan niet; en daarmee is de veronderstelling onjuist. *D* ligt dus wél op de bissectrice van hoek *A*. ◊

4. De Apollonius-cirkel

4.1. *Synthetisch bekeken*

De binnen- en buitenbissectrice van hoek *A* van een driehoek *ABC* snijden de lijn *BC* opvolgend in de punten *D* en *E*; zie figuur a5.

figuur a5



Daarbij is:
- *DB* : *DC* = *AB* : *AC*
- *EB* : *EC* = *AB* : *AC* (*)
- $\angle EAD = 90^o$

Het punt *A* ligt dus op de cirkel met middellijn *DE* (Thales-cirkel met middelpunt *M*).

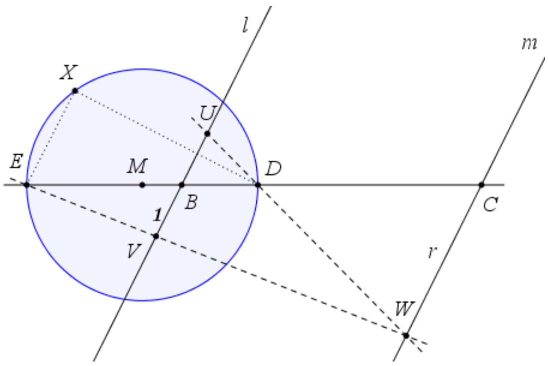
Opmerking. De lezer die niet bekend is met deze eigenschap (*) van de buitenbissectrice, overtuige zich uiteraard van de juistheid hiervan! ◊

4.2. *Constructie*

We zoeken de meetkundige plaats van de punten *X* waarvoor bij een gegeven lijnstuk *BC* geldt:
XB : *XC* = *r* : 1
Deze verhouding is dus bepaald door:
a. twee lijnstukken, de een met lengte *r* en de ander met lengte 1, of
b. twee lijnstukken met lengtes *p* en *q* waarbij *p* : *q* = *r* : 1.

We gaan voor de constructie uit van mogelijkheid a. Zie figuur a6.

figuur a6



Constructiestappen
- Kies op een (willekeurige) lijn *l* door *B* de punten *U* en *V* met *BU* = *BV* = 1.
- Kies op de lijn *m* door *C* evenwijdig met *l* het punt *W* met *CW* = *r*.
- *WU* & *BC* = *D*, *WV* & *BD* = *E* [1]
- *M* = midden(*DE*)
- De cirkel met middellijn *DE* is dan de *r*-Apollonius-cirkel op *BC*.

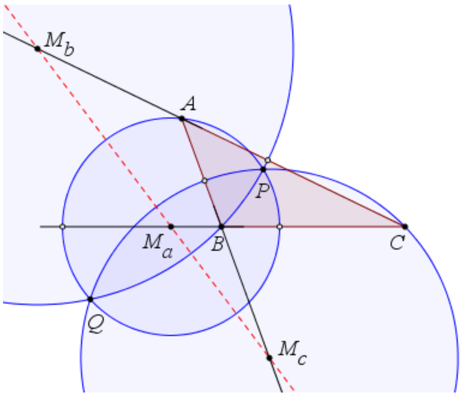
Opmerking. De lezer overtuige zich ervan dat hoek *DXE* met *X* op de zojuist geconstrueerde cirkel gelijk is aan 90°. ◊

4.3. *Apollonius-cirkels bij een driehoek*
Als de lengtes van de zijden van een driehoek *ABC* gelijk zijn aan *a*, *b* en *c*, dan kunnen we op elke zijde van die driehoek een Apollonius-cirkel tekenen, met:

- op *BC*: $r = c/b$
- op *CA*: $r = a/c$
- op *AB*: $r = b/a$

We zien deze cirkels in figuur a7.

figuur a7



Wat in die figuur opvalt:

- de drie cirkels gaan door twee punten *P* en *Q* (dit zijn de *isodynamische punten* van de driehoek);
- de middelpunten M_a, M_b M_c van die cirkels zijn collineair.

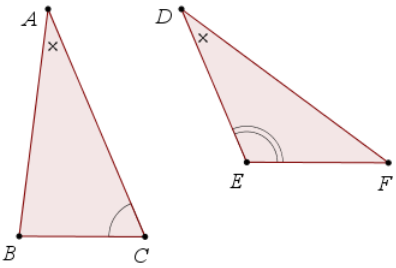
De auteur laat het aan de lezer beide eigenschappen te bewijzen. [2]

5. Een ander bewijs van stelling II

In driehoek *ABC* is volgens de (voor het gemak 'omgekeerde') sinusregel, zie figuur a8:

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB} \text{ en dus ook } \frac{AB}{BC} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

figuur a8



In driehoek *DEF* is volgens diezelfde regel:

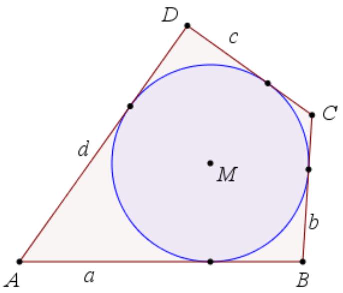
$$\frac{\sin D}{EF} = \frac{\sin E}{DF}\text{, en daarmee ook } \frac{DF}{EF} = \frac{\sin E}{\sin D}$$

Omdat $\sin A = \sin D$ én $\sin C = \sin E$ (*C* en *E* zijn samen immers gelijk aan 180°) is:
$AB : BC = DF : EF$, of iets anders geschreven $AB : DF = BC : EF$ ◊

6. Toegift – Nog wat over een raaklijnenvierhoek

Stelling V. *Een vierhoek ABCD is een raaklijnenvierhoek* (*rvh*) *dan en slechts dan als de sommen* (*van de lengtes*) *van de overstaande zijden gelijk zijn.*

figuur a9



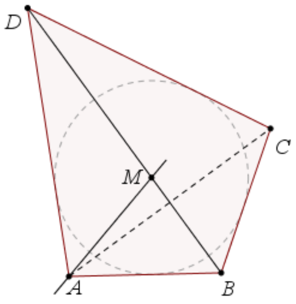
Bewijs (eerste deel, *noodzakelijk*). We gaan uit van een rvh met zijdelengtes a, b, c, d (zie figuur a9). De raaklijnstukken aan de incirkel van de rvh zijn twee aan twee gelijk, en daaruit volgt direct dat $a + c = b + d$. ◊

Bewijs (tweede deel, *voldoende*). Dit deel van het bewijs ligt niet zo voor de hand. [3] We zullen uitgaande van $a + c = b + d$ door middel van constructie laten zien dat vierhoek *ABCD* een incirkel heeft. We onderscheiden ten behoeve van deze constructie drie mogelijkheden:

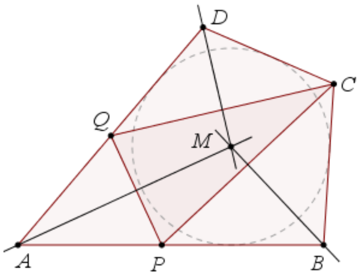
1. $a = b$
2. $a > b$
3. $a < b$

Uit $a + c = b + d$ volgt direct $a - b = d - c$. En deze laatste uitdrukking zullen we een enkele keer gebruiken.

figuur a10a



figuur a10b



ad 1. In dit geval is ook $c = d$. De vierhoek is dan een vlieger; zie figuur a10a. Door constructie moeten we nu aantonen dat een vlieger een incirkel heeft (een vlieger is een rvh)

- Het middelpunt *M* van de gezochte cirkel is het snijpunt van de diagonaal *BD* (vanwege de symmetrie) met de bissectrice van hoek *A* (of van hoek *C*).

ad. 2. Als $a > b$ is, dan is ook $d > c$. Zie figuur a10b.

- Kies nu op *AB* het punt *P* met $BP = b$.
- Kies op *DA* het punt *Q* met $DQ = c$.

Dan is $AP = a - b$, $AQ = d - c$, zodat $AP = AQ$. De driehoeken *APQ*, *BCP* en *CDQ* zijn dus gelijkbenig.

- Construeer de middelloodlijnen van (twee van) de zijden van driehoek *PQC*, elkaar snijdend in het punt *M*. Die lijnen zijn tevens de bissectrices van de hoeken *A*, *B* en *D*.

Met het punt *M* hebben we dan:
afst(M, BC) = afst(M, AB) = afst(M, DA) = afst(M, DC)
En daarmee is aangetoond dat *ABCD* een incirkel heeft. *ABCD* is dan een rvh.
ad 3. In het geval dat $a < b$ is, is er eenzelfde constructie mogelijk als bij 2. ◊

7. Noten

[1] De notatie $X = l$ & m houdt in: X is een snijpunt van de meetkundige objecten l en m.

[2] Zie eventueel ook:
Dick Klingens (2004): *Apollonius-cirkel(s), isodynamische punten*. Op de website van de auteur: *http://www.pandd.demon.nl/apolcirk.htm*

[3] Zie ook:
Paul Yiu (1998): *Notes on Euclidean Geometry*. Elektronisch beschikbaar via:
http://math.fau.edu/Yiu/EuclideanGeometryNotes.pdf ; pag. 156.

8. Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Gedurende enkele jaren was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen vanaf 2018).